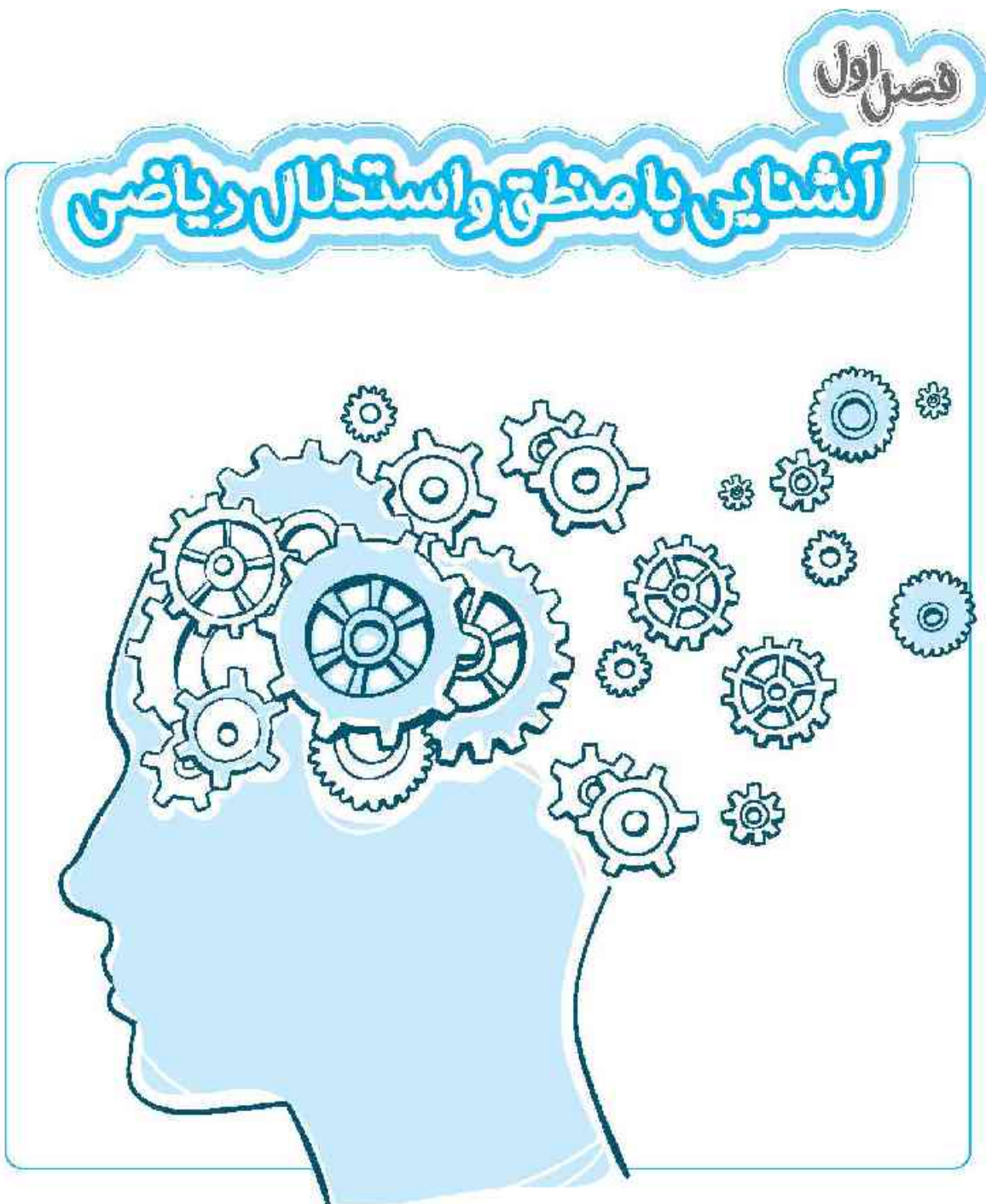


فصل اول

آشنایی با منطق و استدلال ریاضی



آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

فصل اول

دستاوه

منطق ریاضی و گزاره‌ها

← منطق

در لغت به معنای آن چه به گفته درآمده است.

در مورد منطق دو تعبیر به کار برده می‌شود:

① عموماً آن را به معنای بررسی استدلال‌ها تعبیر می‌کنند. بر این اساس، کاربرد منطق در تشخیص اعتبار استدلال‌ها است. در گذشته، منطق صرفاً شاخه‌ای از فلسفه شمرده می‌شد ولی از میانه سده نوزدهم در ریاضیات و در دهه‌های اخیر در علوم رایانه و از دهه ۱۹۸۰ در علوم شناختی نیز به آن می‌پردازند.

② تعبیر دیگری از منطق، روش درست فکر کردن است. با تکیه بر این تعبیر، می‌توان ادعا کرد که منطق دلائل و افروادی که با منطق مأیوس تر هستند، بسیار کمتر از دیگران در استدلال‌ها اشتباه می‌کنند!

از میان اقسام بسیار زیاد منطق، می‌خواهیم در مورد شاخه‌ای از آن که به ارتباط ریاضی و منطق می‌پردازد، صحبت کنیم. این شاخه، منطق ریاضی است که اگر ریاضیات را به عنوان یک زبان برای انتقال مفاهیم و اطلاعات در نظر بگیریم، منطق ریاضی، دستور این زبان است.

تحقیقات علمی درباره منطق ریاضی، در پی برور پرسش‌های نوین در بنیان‌های ریاضیات پدید آمد و روش‌ها و نتایج به دست آمده از آن، نه تنها در حل مسائل بنیادی مورد استفاده است، بلکه در بسیاری از شاخه‌های دیگر ریاضیات نظیر جبر، هندسه و تئوری بازی‌ها و حتی علوم کامپیوتر هم مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرد. یکی از مفاهیم مهم در منطق، گزاره است. به تعاریف زیر خوب دقت کنید:

← جمله خبری

جمله‌ای که خبری (وقوع یا عدم وقوع کار یا وجود یا عدم وجود حالتی) را بیان می‌کند، جمله خبری نام دارد. در این جملات، صدق و کذب بودن یا نادرستی و نادرستی خبرها برای مخاطب، مهم است.

← گزاره

در منطق ریاضی، به هر جمله خبری که بتوانیم (در حال حاضر یا در آینده) دقیقاً یکی از دو ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) را به آن نسبت دهیم، یک گزاره گفته می‌شود.

🔗 **توجه:** جمله‌های غیر خبری، مانند جملات پرسشی، امری، تعجبی یا عاطفی و همچنین جمله‌های خبری که نتوانیم ارزش درستی یا نادرستی آن‌ها را تعیین کنیم، گزاره نیستند. مانند جملات زیر:

۱) علی کجا رفت؟ ← جمله پرسشی

۲) بچه‌ها غذا بخورید. ← جمله امری

۳) گاش کنگور قبول تووم. ← جمله عاطفی

۴) خودکار از مداد گران تر است. ← جمله خبری که ارزش آن معلوم نیست.

🔗 **مسئله:** کدام یک از جملات زیر، گزاره است؟ ارزش هر گزاره را تعیین کنید.

الف) افسوس که زمان به سرعت می‌گذرد.

ب) هر عدد گویا، عددی صحیح است.

ج) فرم سه‌بوی از فیمه خوشنودتر است.

د) فردا هوا آفتابی است!

ه) شیرینی بخور.

و) خیام، شاعر و ریاضی‌دان است.

🔗 **پاسخ:** الف) جمله عاطفی است، پس گزاره نیست.

ب) یک جمله خبری است که نادرست می‌باشد، پس چون نادرستی آن مشخص است، این جمله یک گزاره است که ارزش آن نادرست می‌باشد.

ج) یک جمله خبری است ولی نمی‌توانیم تعیین کنیم که دقیقاً درست یا نادرست است، چون بستگی به نظر هر شخص دارد. بنابراین گزاره نیست.

د) یک جمله پرسشی است، پس گزاره نیست.

ه) جمله امری است، در نتیجه گزاره نیست.

و) یک جمله خبری است که درست می‌باشد. بنابراین گزاره‌ای است که ارزش آن درست می‌باشد.

فایده اجاره جمله «سارا شاگرد اول مدرسه است.» گزاره هست؟ به نظر من که نیست، آخه ما نمی‌دونیم که سارا شاگرد اول هست یا نه؟
پاسخ اشتباه کردی، بدون تعریف رو خوب به خاطر نسپردی. کفایت گزاره، جمله فیزی هست که در واقعاً در واقعاً درست یا نادرست یا نادرست. این جمله‌ای که گفتی، جمله فیزی هست که برای ما معلوم نیست درست یا نادرست، ولی بازمه سارا یا شاگرد اول هست یا نیست. پس آگه شاگرد اول باشه ارزش جمله درست و آگه نباشه ارزش جمله نادرست. یکی از این دو حالت قطعاً اتفاق میفته، پس گزاره هست.

فایده اجاره پس قسمت «ج» مثال قبل رو چرا گفتین گزاره نیستا! خوب اونم یا خوشمزه‌تر هست یا نیست دیگه!
پاسخ به جمله‌ای که گفتی، بیشتر فکر کن! واقعاً می‌تونی دقیق بگی قهوه خوشمزه‌تره یا قهوه؟ معلومه که نه. من میگم قهوه خوشمزه‌تره، تو میگی قهوه، یکی رنگه میکه هیچ کدوم و ... بنابراین درست یا نادرست بودن این جمله دقیقاً مشابه نیست. ونی درست یا نادرستی جمله «سارا شاگرد اول مدرسه است.» به نظر کسی بستگی نزاره، از تعراتش همیشه فهمید که بالاخره هست یا نیست. تعیین گزاره بودن این پوز جمله‌ای فیزی از همه سلامت‌تر هستش که البته آگه خوب پیش رقت و فکر کنی، راحت می‌تونی به جواب برسی.

← جبر گزاره‌ها (حساب گزاره‌ها)

به مجموعه قرارداده‌ها و تدابیری‌هایی که در منطق ریاضی (برای گزاره‌ها) به کار می‌روند جبر (حساب) گزاره‌ها گفته می‌شود.
نمادها:

- ۱) هر گزاره با یکی از حروف کوچک انگلیسی مانند p یا q یا r یا ... نشان داده می‌شود.
- ۲) ارزش درستی هر گزاره را با حرف «د» (یا «A» یا عدد «۱») و ارزش نادرستی آن را با حرف «ن» (یا «F» یا عدد «۰») نشان می‌دهند.
- ۳) **نکته** چون ارزش هر گزاره درست یا نادرست (۲ حالت) است، وقتی n گزاره داریم، تعداد حالت‌های ارزشی آن گزاره برابر 2^n است.
- ۴) برای نمایش وضعیت ارزش گزاره‌ها می‌توانیم جدولی به صورت زیر رسم کنیم. به تعداد حالت‌ها در هر قسمت دقت کنید:

← یک گزاره	<table border="1"> <tr><th>p</th></tr> <tr><td>د</td></tr> <tr><td>ن</td></tr> </table>	p	د	ن	$2 - 2^1 =$ تعداد حالت‌ها																								
p																													
د																													
ن																													
← دو گزاره	<table border="1"> <tr><th>p</th><th>q</th></tr> <tr><td>د</td><td>د</td></tr> <tr><td>د</td><td>ن</td></tr> <tr><td>ن</td><td>د</td></tr> <tr><td>ن</td><td>ن</td></tr> </table>	p	q	د	د	د	ن	ن	د	ن	ن	$4 - 2^2 =$ تعداد حالت‌ها																	
p	q																												
د	د																												
د	ن																												
ن	د																												
ن	ن																												
← سه گزاره	<table border="1"> <tr><th>p</th><th>q</th><th>r</th></tr> <tr><td>د</td><td>د</td><td>د</td></tr> <tr><td>د</td><td>د</td><td>ن</td></tr> <tr><td>د</td><td>ن</td><td>د</td></tr> <tr><td>د</td><td>ن</td><td>ن</td></tr> <tr><td>ن</td><td>د</td><td>د</td></tr> <tr><td>ن</td><td>د</td><td>ن</td></tr> <tr><td>ن</td><td>ن</td><td>د</td></tr> <tr><td>ن</td><td>ن</td><td>ن</td></tr> </table>	p	q	r	د	د	د	د	د	ن	د	ن	د	د	ن	ن	ن	د	د	ن	د	ن	ن	ن	د	ن	ن	ن	$8 - 2^3 =$ تعداد حالت‌ها
p	q	r																											
د	د	د																											
د	د	ن																											
د	ن	د																											
د	ن	ن																											
ن	د	د																											
ن	د	ن																											
ن	ن	د																											
ن	ن	ن																											

← نقیض گزاره

نقیض گزاره p را با نماد $(\sim p)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت «نقیض p» یا «چنین نیست که p» می‌خوانیم.
روش نوشتن نقیض یک گزاره: هر گزاره یک جمله خبری است که دارای فعل می‌باشد. برای نوشتن نقیض آن کافی است فعل جمله را نفی کنیم. مثلاً نقیض گزاره «۲ زوج است.» می‌شود «۲ زوج نیست.»

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

تذکره اگر گزاره p دارای ارزش درست باشد، گزاره $(\sim p)$ نادرست و اگر گزاره p دارای ارزش نادرست باشد، ارزش گزاره $(\sim p)$ درست است.

نکته نقیض نقیض یک گزاره برابر خود گزاره است.

مشکل نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید و ارزش نقیض آن‌ها را مشخص کنید.

- الف) n عددی منفی است.
- ب) شهید یک شهر زیارتی است.
- ج) مربع هر عددی از خود عدد بزرگ‌تر است.
- د) هوا برفی است.
- هـ) $2^3 < 2^2$
- و) جمع دو عدد فرد، فرد می‌شود.

پاسخ الف) عددی منفی نیست. چنین نیست که a عددی منفی است.
 ب) با توجه به مقدار a درست یا نادرست است.

خانه‌انوار ما نقیض این گزاره رو به صورت « n عددی مثبت است. » نوشتیم. درسته؟

پس **باز** نه، گامنا ندرسته! چون « n عددی منفی نیست یعنی یا همیشه یا همیشه در صورتی که گزاره n عددی مثبت است شامل منفی نمی‌شه پس وقت کنین، برای نوشتن نقیض به گزاره به همون روشی که گفتیم عمل کنین، یعنی فعل جمله رو منفی کنین یا از جمله همین نیست که ... استفاده کنین.

- ب) مشابه شهر زیارتی نیست. }
چنین نیست که مشهد یک شهر زرتی است. } **ارزش نادرست**
- ج) مربع هر عددی از خود عدد بزرگتر نیست. }
چنین نیست که مربع هر عددی از خود عدد بزرگتر است. } **ارزش درست**

خانه‌انوار چرا ارزش این گزاره درسته؟

پس **باز** چون مربع هر عددی همیشه از فور عدد بزرگتر نیست، مثل عدد $\frac{1}{4}$ که مربع اون $\frac{1}{16}$ همیشه که از فورش کوچک‌تره.

- د) هوا برفی نیست. }
چنین نیست که هوا برفی است. } **ارزش** با توجه به وضعیت هوا، درست یا نادرست است.
- ه) $2^3 < 3^2$ یعنی عدد 8 از عدد 9 بزرگتر است. پس نقیض آن به صورت زیر است:
عدد 8 از عدد 9 بزرگتر نیست. }
چنین نیست که عدد 8 از عدد 9 بزرگتر است. } **ارزش درست**
- پس اگر بخوایم نقیض این گزاره را به صورت ریاضی بنویسیم، به شکل $2^3 > 3^2$ می‌شود.
- و) جمع دو عدد فرد، فرد نمی‌شود. }
چنین نیست که جمع دو عدد فرد، فرد می‌شود. } **ارزش درست** (چون جمع دو عدد فرد، زوج می‌شود).

همیشه یاد می‌مونه

بررسی استدلال‌ها

تعبیر منطق روش درست فکر کردن

گزاره: جمله خبری که دقیقاً دارای ارزش درست یا ارزش نادرست است.

P یا Q یا T ... «د» یا «T» یا «ا» «ن» یا «F» یا «و»

n حالت‌های ارزشی n گزاره برابر 2^n است.

می‌خوانیم نقیض P یا نقیض Q یا ... یا چنین نیست که P یا ...

برای نوشتن، فعل گزاره P یا Q یا ... را منفی می‌کنیم.

اگر ارزش P یا Q یا ... درست باشد، ارزش $(\sim P)$ یا $(\sim Q)$... نادرست است و برعکس.

ارزش نقیض نقیض یک گزاره $(\sim(\sim P))$ یا $(\sim(\sim Q))$... با ارزش گزاره P یا Q یا ... یکسان است.

نقیض گزاره

$(\sim P)$ یا $(\sim Q)$

یا $(\sim(\sim P))$ یا ...

۱- متعلق در لغت به چه معنا است؟

- ۱) بررسی استدلال‌ها
۲) آن چه به گفته درآمده
۳) روش درست فکر کردن
۴) منطق کردن

۲- کدام گزینه نادرست است؟

- ۱) منطق، شاخه‌ای از علوم ریاضی، فلسفه و رایانه است.
۲) به جمله‌ای که وقوع یا عدم وقوع حالتی را بیان می‌کند، جمله خبری گفته می‌شود.
۳) به هر جمله خبری، یک گزاره گفته می‌شود.
۴) به مجموعه فرادادها و نمادگذاری‌هایی که در منطق ریاضی به‌کار می‌رود، حساب گزاره‌ها گفته می‌شود.

۳- کدام یک از گزینه‌های زیر، یک گزاره را نشان می‌دهد؟

- ۱) درس عربی از درس ریاضی دشوارتر است.
۲) فرد باران می‌بارد؟
۳) بچه‌ها سادت باشید.
۴) مقبره حافظ در کرمان است.

۴- چه تعداد از موارد زیر، گزاره است؟

(الف) بوستان یکی از کتاب‌های مولوی است.

(ج) هوای شمال کشور از جنوب کشور، بهتر است.

(هـ) چه فیلم زیبایی است.

(۱) صفر (۲) ۱

۵- ارزش کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

(۱) $(-3)^2 = 27 = 3^2$

(۳) $\frac{1}{5^2} > \frac{1}{4^2}$

(ب) هفته سختی را گذراندی؟

(د) ضرب ۵۰ عدد گنگ، عددی گویا است.

(و) در هر مثلث، مجموع دو ضلع از ضلع سوم، بزرگ‌تر است.

(۳) ۴ (۴) ۳

(۲) $\sqrt{121}$ عدد اول است.

(۴) عدد ۱۲ داری ۶ مقسوم‌علیه صحیح است.

۶- ارزش کدام یک از گزاره‌های زیر، نادرست است؟

(۱) میانه نیمه دوم داده‌ها، چارک سوم نام دارد.

(۲) نمودار راداری برای ۴ متغیر، رسم می‌شود.

(۳) اگر یک سری از داده‌های آماری را (-2) برابر کنیم، و رندنس آن‌ها ۴ برابر می‌شود.

(۴) وزن یک شخص، متغیر کمی با مقیاس نسبی است.

۷- تعداد حالت‌های ارزشی m گزاره چند برابر تعداد حالت‌های ارزشی n گزاره است؟

(۱) ۸ (۲) ۲۲ (۳) ۴ (۴) ۱۶

۸- تعداد حالت‌های ارزشی m گزاره برابر ۱۲۸ تا است. اگر ۲ تا از گزاره‌ها را حذف کنیم، از تعداد حالت‌های ارزشی، چند تا کم می‌شود؟

(۱) ۲۲ (۲) ۸۴ (۳) ۶۲ (۴) ۹۶

۹- در جدول ارزشی ۴ گزاره، چندبار حرف «د» نوشته می‌شود؟

(۱) ۱۶ (۲) ۸ (۳) ۳۲ (۴) ۶۴

۱۰- نقیض گزاره « m عدد نامثبت نیست» کدام است؟

(۱) m عدد مثبت است.

(۲) چنین نیست که m عدد نامثبت است.

(۳) m عدد منفی است.

(۴) m عدد منفی یا صفر است.

۱۱- نقیض گزاره « $-4 < -3$ » کدام نیست؟

(۱) -3 بزرگ‌تر از -4 است.

(۲) -4 کوچک‌تر یا مساوی -3 است.

(۳) چنین نیست که -3 از -4 کوچک‌تر است.

(۴) -3 از -4 کوچک‌تر نیست.

۱۲- در مورد نقیض گزاره «هر عدد منفی از معکوس خود، کوچک‌تر است» کدام درست است؟

(۱) داری ارزش نادرست است.

(۲) به صورت «هر عدد منفی از معکوس خود، بزرگ‌تر است» بیان می‌شود.

(۳) داری ارزش درست است.

(۴) به صورت «هر عدد مثبت از معکوس خود، کوچک‌تر است» بیان می‌شود.

۱۳- اگر نقیض گزاره‌های p و q به ترتیب به صورت « $\sqrt{225}$ عدد اول است» و « $x = y^2$ ضابطه یک تابع بر حسب متغیر x نیست» باشد:

ارزش گزاره‌های p و q به ترتیب کدام است؟

(۱) درست - نادرست (۲) نادرست - درست (۳) درست - درست (۴) نادرست - نادرست

۱۴- اگر ارزش نقیض گزاره « a عددی اول است» درست باشد، a کدام نمی‌تواند باشد؟

(۱) $\sqrt{81}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{124}{4}$ (۴) $\sqrt{36} - \sqrt{4}$

۱۵- نقیض چه تعداد از گزاره‌های زیر، نادرست است؟ ($x \in \mathbb{Z}$)

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

نقیض گزاره	گزاره
$x \in \mathbb{N}$	(الف) $x \in \{0, -1, -2, -3, \dots\}$
$x = 0$	(ب) $x + 2x^2 \neq 0$
$x \leq 2$	(ج) $x \geq 3$
$x \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$	(د) $\{x : x > -x\}$

دوستان

ترکیب گزاره‌ها (قسمت اول)

گاهی گزاره‌ای را بیان می‌کنیم که ترکیبی از دو یا چند گزاره است. ارزش این گزاره ترکیبی به ارزش دو یا چند گزاره‌ای که آن تشکیل شده و همچنین نوع رابط به‌کار رفته بین آن‌ها بستگی دارد. به مفهیم زیر توجه کنید:

گزاره ساده

گزاره‌ای است که تنها یک خبر را اعلام می‌کند و قابل تجزیه (به گزاره‌های دیگر) نیست.

گزاره مرکب

گزاره‌ای است که دربارهٔ بیش از یک خبر، آگاهی می‌دهد و در واقع به گزاره‌ای گفته می‌شود که ترکیبی از چند گزاره ساده است. به‌طور مثال، گزاره «امروز سه‌شنبه است و هوا آفتابی است»، گزاره‌ای مرکب از دو گزاره ساده «امروز سه‌شنبه است» و «هوا آفتابی است» می‌باشد.

در این کتاب، ترکیب گزاره‌ها توسط ۴ رابط «و»، «یا»، «شرطی» و «دوشرطی» انجام می‌شود.

با توجه به نوع رابط بین گزاره‌ها می‌توان ترکیب آن‌ها را به ۴ دسته تقسیم کرد:

۱- ترکیب عطفی دو گزاره

دو گزاره را می‌توان با قراردادن حرف ربط «و» با هم ترکیب کرد. گزاره حاصل را ترکیب عطفی دو گزاره می‌نامیم. مانند «شیرین کلاس دوم است و برادرش کلاس پنجم است». اگر بخواهیم ترکیب عطفی دو گزاره P و Q را بنویسیم، به‌جای حرف «و» از نماد «∧» بین دو گزاره استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم «P ∧ Q» و آن را به صورت «P و Q» می‌خوانیم.

P	Q	P ∧ Q
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

ارزش ترکیب عطفی دو گزاره: ترکیب عطفی دو گزاره فقط وقتی دارای ارزش درست است که هر دو گزاره ارزش درست داشته باشند. بنابراین اگر حداقل یکی از دو گزاره نادرست باشند، ارزش گزاره «P ∧ Q» نادرست است. به جدول مقابل دقت کنید.

مثال: ارزش گزاره‌های عطفی زیر را مشخص کنید.

- الف) ۱۲ مضرب ۴ است و ۶ مضرب ۴ نیست.
- ب) ۱۳ عددی اول است و ۹ عددی اول است.
- ج) هر سال ۱۲ ماه دارد و هر ماه ۳۰ روز است.
- د) گوسفند، پر دارد و اسب، پشم دارد.

از جدول ارزش گزاره‌ها استفاده می‌کنیم تا به وضوح، جواب براینان مشخص شود.

الف	ترکیب عطفی دو گزاره	۶ مضرب ۴ نیست	۱۲ مضرب ۴ است
د	د	د	د
ب	ترکیب عطفی	۹ عددی اول است	۱۳ عددی اول است
د	ن	د	د
ج	ترکیب عطفی	هر ماه ۳۰ روز است	هر سال ۱۲ ماه دارد
د	ن	د	د
د	ترکیب عطفی	اسب، پشم دارد	گوسفند، پر دارد
د	ن	د	د

P	~P	P ∧ (~P)
د	ن	ن
ن	د	ن

نکته: ترکیب عطفی هر گزاره با نقیضش همواره نادرست است.

نکته: ترکیب عطفی برای بیشتر از دو گزاره هم تعریف می‌شود: $P \wedge Q \wedge T \wedge \dots$

۲- ترکیب فصلی دو گزاره

اگر دو گزاره را با قراردادن حرف ربط «یا» با هم ترکیب کنیم، گزاره حاصل را ترکیب فصلی دو گزاره می‌نامیم. مانند «امروز آسمان آبی است یا هوا برفی است». اگر بخواهیم ترکیب فصلی دو گزاره P و Q را بنویسیم، از نماد «∨» بین دو گزاره استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم «P ∨ Q» و آن را به صورت «P یا Q» می‌خوانیم.

ارزش ترکیب فصلی دو گزاره: ترکیب فصلی دو گزاره تنها وقتی دارای ارزش نادرست است که هر دو گزاره ارزش نادرست داشته باشند. در نتیجه اگر حداقل یکی از دو گزاره درست باشد، ارزش گزاره « $p \vee q$ » درست است.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

مثال هر گزاره را طوری بنویسید که ارزش گزاره فصلی حاصل، مطابق جدول زیر باشد.

ردیف	گزاره فصلی	ارزش گزاره
الف	سعیدی کتاب شاهنامه را نوشته است یا	د
ب	$\sqrt{3}$ عددی گنگ است یا	د
ج	$5 < 6$ یا	ن
د	هر مستطیلی، مربع است یا	د

نکته الف) گزاره «سعیدی کتاب شاهنامه را نوشته است» گزاره‌ای نادرست است و می‌دانیم اگر بخواهیم ارزش گزاره فصلی حاصل، درست باشد، باید گزاره دومی که می‌نویسیم، حتماً دارای ارزش درست باشد. پس می‌توانیم گزاره‌ای مانند «زمین گرد است» را به گزاره اول، ترکیب فصلی کنیم. ب) گزاره « $\sqrt{3}$ عددی گنگ است» دارای ارزش درست است. با توجه به ارزش گزاره فصلی حاصل که درست است، می‌توانیم گزاره‌ای دارای ارزش درست یا نادرست را به گزاره اول، ترکیب فصلی کنیم که در هر صورت، ارزش گزاره فصلی درست می‌شود. مانند گزاره « 2 عدد اول نیست» که دارای ارزش نادرست است یا گزاره‌ای با ارزش درست، مانند «منموند بلندترین کوه ایران است». ج) گزاره « $5 < 6$ » دارای ارزش نادرست است و ارزش گزاره فصلی حاصلی هم نادرست می‌باشد. پس باید گزاره دوم، هم دارای ارزش نادرست باشد. مانند « $5 < 4$ ».

د) ارزش گزاره «هر مستطیلی، مربع است» نادرست است و چون ارزش گزاره فصلی حاصل درست است، گزاره دوم باید دارای ارزش درست باشد. مثلاً می‌توانیم گزاره درست «ترکیب رنگ قرمز و آبی، بنفش می‌شود» را بنویسیم.

p	$\neg p$	$p \vee (\neg p)$
د	ن	د
ن	د	د

نکته ترکیب فصلی هر گزاره با نقیضش، همواره درست است.

نکته ترکیب فصلی برای بیشتر از دو گزاره هم تعریف می‌شود: $p \vee q \vee r \vee \dots$

۳- ترکیب شرطی دو گزاره

دو گزاره را می‌توان به صورت «شرطی» با هم ترکیب کرد و گزاره حاصل را ترکیب شرطی دو گزاره می‌نامیم. مانند «اگر من خوب درس بخوانم، آنگاه نمره خوب خواهم گرفت».

اگر بخواهیم از گزاره p گزاره q را نتیجه بگیریم، از نماد « \rightarrow » استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم « $p \rightarrow q$ » و آن را به صورت‌های زیر می‌خوانیم:

۱) اگر p ، آنگاه q ۲) p نتیجه می‌دهد q را ۳) q از p نتیجه می‌شود.

مقدم و تالی: در گزاره شرطی « $p \rightarrow q$ » به p مقدم و به q تالی می‌گوییم.

p	q	$p \rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

ارزش ترکیب شرطی دو گزاره: گزاره شرطی « $p \rightarrow q$ » فقط زمانی دارای ارزش نادرست است که مقدم، یعنی p درست بوده ولی تالی، یعنی q نادرست باشد. در واقع زمانی که از یک گزاره درست، یک گزاره نادرست نتیجه می‌شود.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

ارزش گزاره شرطی به انتقای مقدم: وقتی ارزش مقدم، یعنی p در یک گزاره شرطی، نادرست باشد، همواره « $p \rightarrow q$ » دارای ارزش درست است و تالی، یعنی q چه درست باشد چه نادرست، تأثیری در ارزش ترکیب شرطی ندارد. در این دو حالت، گزاره شرطی به انتقای مقدم، دارای ارزش درست است.

توجه: ما نمی‌توانیم این آخری چی شد؟ همیشه بیشتر توضیح بدید.

نکته به هر امیثه! بیین آگه ما جمله مقدم یعنی جمله‌ای که بعد از «اگر» میارو گزاره‌ای نادرست بگیریم، مثل «روز قبیل از شنبه یکشنبه باشد» اون وقت جمله بعد از «اگر» که رو هر چی بگیریم، هر جمله‌ای، هان ما می‌فولر درست باشه یا نادرست. مثل گزاره درست «دروز بعد از یکشنبه، دوشنبه است» یا گزاره نادرست «روز بعد از یکشنبه، سه‌شنبه است» تو ارزش گزاره شرطی حاصل، تأثیری نداره، ارزش گزاره شرطی حاصل، همیشه درسته. بیین: «اگر روز قبیل از شنبه یکشنبه باشد، آنگاه روز بعد از یکشنبه، دوشنبه است» که این به گزاره همیشه درسته.

۱۵- ارزش گزاره‌های زیر را با توجه به ارزش گزاره‌های p ، q و r مشخص کنید.

الف) $(q \Rightarrow p) \wedge r$ در صورتی که گزاره p ، نادرست و گزاره‌های q و r درست باشند.

ب) $(p \vee r) \Rightarrow (\sim q)$ در صورتی که p گزاره‌ای دلخواه، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای درست باشد.

ج) $p \Rightarrow (r \Rightarrow q) \Rightarrow p$ در صورتی که گزاره‌های p و r نادرست و q گزاره‌ای دلخواه باشد.

۱۶- الف) گزاره‌ای درست و \neg گزاره‌ای نادرست است. پس ارزش گزاره شرطی $q \Rightarrow p$ نادرست می‌شود. از طریق آزمون گزاره‌ای درست است. در نتیجه ترکیب عطفی گزاره‌ای نادرست با گزاره‌ای درست گزاره‌ای نادرست می‌شود. یعنی ارزش گزاره $(q \rightarrow p) \wedge r$ نادرست است.

ب) r گزاره‌ای درست است. پس p چه درست و چه نادرست باشد ارزش گزاره فصلی $p \vee r$ درست است. از طرفی q گزاره‌ای نادرست است. پس تقیض آن درست می‌باشد. حال از یک گزاره درست، گزاره درست نتیجه شده. پس ارزش گزاره $(\sim q) \rightarrow (p \vee r)$ درست است.

ج) r گزاره‌ای نادرست است. پس q چه درست باشد و چه نادرست، ارزش گزاره $r \Rightarrow q$ به انتقای مقدم، درست می‌باشد. حال از یک گزاره درست، یک گزاره نادرست نتیجه شده. پس ارزش گزاره $(r \rightarrow q) \rightarrow p$ نادرست می‌شود.

نتیجه

۱) در یک گزاره شرطی، اگر مقدم، نادرست باشد (تالی چه درست و چه نادرست)، ارزش گزاره شرطی درست است.

۲) در یک گزاره شرطی، اگر تالی درست باشد (مقدم چه درست و چه نادرست)، ارزش گزاره شرطی درست است.

۳) «همیشه یده» نمونه «مربوط به این درسنامه با درسنامه بعدی» یا هم آورده شده است.

۱۶- ارزش گزاره‌های «الف» و «ب» به ترتیب کدام است؟

الف) تهران، پایتخت ایران است و علم‌کوه بلندترین قله ایران است.

ب) پل خواجه در خوزستان است یا مقبره خیام در همدان است.

- ۱) نادرست - نادرست ۲) نادرست - درست ۳) درست - نادرست ۴) درست - درست

۱۷- ارزش کدام گزاره با بقیه متفاوت است؟

- ۱) $(4 \leq (-2)^2) \wedge (-\sqrt{2} > -\sqrt{3})$
 ۲) $(-\frac{1}{4} \in \mathbb{R}) \vee (-(-3)^2 < 0)$
 ۳) $(\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W}) \vee (-5^2 - \sqrt{625})$
 ۴) $(\sqrt{7} \in \mathbb{Q}) \wedge (3 - 0)$

۱۸- گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ در چه صورتی نادرست است؟

- ۱) وقتی p درست و q نادرست باشد.
 ۲) وقتی q نادرست باشد.
 ۳) وقتی p و q نادرست باشند.
 ۴) وقتی p نادرست باشد.

۱۹- اگر ارزش گزاره p نادرست و ارزش گزاره q درست باشد، آن‌گاه ارزش گزاره‌های $(\sim p) \vee q$ و $(p \wedge (\sim q))$ به ترتیب کدام است؟

- ۱) درست - نادرست ۲) درست - درست ۳) نادرست - نادرست ۴) نادرست - درست

۲۰- ارزش گزاره $(p \wedge q) \vee (\sim (p \wedge q))$ کدام است؟

- ۱) همواره درست
 ۲) همواره نادرست
 ۳) بستگی به ارزش p و q دارد.
 ۴) فقط اگر p نادرست باشد، نادرست است.

۲۱- اگر تقیض گزاره‌های p و q دارای ارزش درست و گزاره r دارای ارزش نادرست باشد، آن‌گاه ارزش گزاره‌های $(p \wedge q) \vee r$ و $(\sim (p \vee r)) \wedge (\sim q)$ به ترتیب کدام است؟

- ۱) درست - درست ۲) درست - نادرست ۳) نادرست - درست ۴) نادرست - نادرست

۲۲- اگر p گزاره‌ای نادرست و q گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش کدام گزاره، همواره نادرست است؟

- ۱) $(p \wedge q) -$ ۲) $(\sim p) \vee q$ ۳) $((\sim p) \wedge p) \vee q$ ۴) $(q \vee (\sim q)) \wedge p$

۲۳- اگر ترکیب عطفی گزاره p با گزاره «میان» همان چارک دوم داده‌ها است. دارای ارزش درست باشد، گزاره p کدام می‌تواند باشد؟

- ۱) الفبای فارسی دارای ۲۸ حرف است.
 ۲) توان دوم هر عدد از خود عدد بزرگتر است.
 ۳) مغزها را به ده معیار کیفی و کمی تقسیم می‌کنند.
 ۴) $x^2 - y^2 = 0$ ضابطه یک تابع است.

۲۴- ارزش گزاره $p \vee q \Rightarrow p$ در چه صورتی به انتقای مقدم، درست است؟

- ۱) p و q هر دو درست ۲) p نادرست و q درست ۳) p درست و q نادرست ۴) p و q هر دو نادرست

۲۵- ارزش گزاره‌های (الف) و (ب) به ترتیب کدام است؟

(الف) اگر سعدی شاعر شاهنامه است، آن‌گاه مولوی شاعر بوستان است.
(ب) اگر مقبره بوعلی در همدان است، آن‌گاه مقبره خیام در تبریز است.

(۱) درست - نادرست (۲) نادرست - درست (۳) درست - درست (۴) نادرست - نادرست

۲۶- ارزش گزاره $(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge q)$ در چند حالت، درست است؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۲

۲۷- ارزش کدام گزاره نادرست است؟

(۱) اگر ۴۵ عدد اول است، آن‌گاه ۲۸۹ عدد مربع کامل است.
(۲) اگر ۱۴ مضرب ۴ است، آن‌گاه $-(۲)^۲$.
(۳) اگر $۴ < ۵$ است، آن‌گاه $\frac{1}{۲} > \frac{1}{۳}$ نیست.
(۴) اگر $۲ - ۳ = ۱ \times ۲$ است، آن‌گاه ۹۱ عدد مرکب است.

۲۸- اگر گزاره‌های درست و q و گزاره‌هایی دلخواه باشند، آن‌گاه ارزش گزاره $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge r)$ کدام است؟

(۱) درست (۲) به ارزش q بستگی دارد. (۳) نادرست (۴) به ارزش r بستگی دارد.

۲۹- ارزش چه تعداد از گزاره‌های زیر، نادرست است؟

(الف) اگر ۲۵ درصد داده‌ها کم‌تر از چارک اول است، آن‌گاه ۷۵ درصد داده‌ها بیشتر از چارک سوم است.
(ب) اگر رنگ چشم، متغیر کمی است، آن‌گاه نمونه درس ریاضی، متغیر کیفی است.
(ج) اگر میانگین، معیار گرایش به مرکز است، آن‌گاه واریانس معیار پراکندگی است.
(د) اگر نمودار دایره‌ای برای دو متغیر است، آن‌گاه نمودار پراکنش نگاهت هم برای دو متغیر است.

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۰- اگر گزاره‌های نادرست و q گزاره‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه ارزش کدام گزاره همواره نادرست است؟

(۱) $p \rightarrow \sim p$ (۲) $\sim q \rightarrow p$ (۳) $\sim p \rightarrow p$ (۴) $q \rightarrow \sim p$

۳۱- اگر گزاره‌های درست و q و گزاره‌هایی نادرست باشند، آن‌گاه کدام‌یک از گزاره‌های زیر، نادرست است؟

(۱) $(p \wedge q) \rightarrow r$ (۲) $\sim p \rightarrow (q \vee r)$ (۳) $q \wedge (p \rightarrow r)$ (۴) $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

۳۲- اگر گزاره‌های نادرست و ارزش گزاره $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ هم نادرست باشد، آن‌گاه ارزش گزاره‌های q و r به ترتیب کدام است؟

(۱) درست - نادرست (۲) نادرست - درست (۳) نادرست - دلخواه (۴) دلخواه - نادرست

۳۳- اگر گزاره‌های درست و q و گزاره‌هایی نادرست باشند، آن‌گاه ارزش کدام گزاره، درست است؟

(۱) $q \vee (p \rightarrow r)$ (۲) $(\sim q \vee p) \wedge r$ (۳) $(p \rightarrow q) \wedge (\sim r)$ (۴) $\sim p \rightarrow \sim (q \vee r)$

۳۴- اگر گزاره‌های درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه ارزش کدام‌یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

(۱) $(r \rightarrow p) \vee q$ (۲) $\sim q \rightarrow (\sim p \wedge r)$ (۳) $(\sim p \rightarrow r) \rightarrow \sim q$ (۴) $q \wedge r \rightarrow p$

۳۵- اگر p و q گزاره‌های دلخواه و r گزاره‌ای نادرست باشد، آن‌گاه کدام‌یک از گزاره‌های زیر، همواره درست است؟

(۱) $(p \vee q) \wedge r$ (۲) $\sim r \rightarrow (r \wedge p)$ (۳) $(r \rightarrow p) \vee q$ (۴) $p \rightarrow (q \vee r)$

۳۶- کدام‌یک از گزاره‌های زیر، همواره درست نیست؟

(۱) $p \vee \sim p$ (۲) $p \wedge q \rightarrow p$ (۳) $\sim p \rightarrow p$ (۴) $(p \rightarrow q) \vee p$

۳۷- اگر گزاره $p \Rightarrow q$ نادرست و گزاره $(r \wedge p) \Rightarrow t$ درست باشد، آن‌گاه ارزش گزاره‌های t و r به ترتیب کدام است؟

(۱) نادرست - دلخواه (۲) نادرست - درست (۳) درست - درست (۴) دلخواه - نادرست

۳۸- اگر گزاره p به صورت $a^3 - b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ باشد، آن‌گاه گزاره q کدام باشد، تا ارزش گزاره $q \vee p \Rightarrow$ درست باشد؟

(۱) عدد ۶ مقسوم‌علیه ۲۴ است. (۲) $x - ۲$ ضابطه یک تابع نیست. (۳) $\sqrt{\frac{1}{x}} - ۲^{-1}$ (۴) معادله $x^2 + 1 = 0$ دو ریشه دارد.

۳۹- اگر گزاره‌های درست باشند، آن‌گاه کدام‌یک از گزاره‌های زیر، همواره نادرست است؟

(۱) $p \vee \sim q \rightarrow r$ (۲) $q \rightarrow \sim p$ (۳) $(\sim p \wedge r) \vee p$ (۴) $p \rightarrow (\sim p \wedge q)$

۴۰- اگر گزاره‌های $p \vee q$ و $r \Rightarrow q$ درست و گزاره‌های $p \wedge r$ و $p \Rightarrow t$ نادرست باشند، آن‌گاه چندتا از گزاره‌های p, q, r, t دارای

ارزش درست هستند؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۴۱- اگر ارزش گزاره‌های $p \wedge r$ ، $(r \wedge q) \Rightarrow (q \vee t)$ و $t \Rightarrow \neg r$ نادرست باشد، آن‌گاه ارزش چندتا از گزاره‌های p ، q ، r و t نادرست است؟

- ۱) صفر (۱) ۲) ۱ (۲) ۳) ۲ (۳) ۴) ۳ (۴)

۴۲- اگر گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $p \Rightarrow \neg q$ هر دو درست باشند، آن‌گاه کدام گزاره زیر، همواره درست است؟

- ۱) $\neg p$ (۱) ۲) q (۲) ۳) p (۳) ۴) $\neg q$ (۴)

۴۳- ارزش گزاره $(p \Rightarrow r) \Rightarrow q$ در چند حالت درست است؟

- ۱) ۵ (۱) ۲) ۴ (۲) ۳) ۸ (۳) ۴) ۳ (۴)

۴۴- در چه حالتی، ارزش گزاره $(\neg p \wedge \neg r) \Rightarrow q \vee r$ نادرست است؟

- ۱) p و q نادرست و r درست (۱) ۲) p نادرست و q و r درست (۲) ۳) p ، q و r نادرست (۳) ۴) p درست و q و r نادرست (۴)

۴۵- اگر ارزش گزاره «اگر دیروز شنبه بود، آن‌گاه فردا چهارشنبه یا دوشنبه است.» به انتهای مقدم، درست و ارزش تالی آن هم درست باشد، آن‌گاه امروز چندشنبه است؟

- ۱) یکشنبه (۱) ۲) سه‌شنبه (۲) ۳) پنج‌شنبه (۳) ۴) جمعه (۴)

۴۶- اگر ارزش p ، درست و ارزش گزاره $(\neg p \vee \sim q) \wedge p$ نادرست باشد، ارزش q کدام است؟

- ۱) درست (۱) ۲) نادرست (۲)

۳) چه درست باشد و چه نادرست، این گزاره نادرست است. (۳) ۴) نمی‌توان تعیین کرد. (۴)

۴۷- اگر ارزش گزاره شرطی $r \Rightarrow (p \vee q)$ نادرست باشد، آن‌گاه کدام یک از گزاره‌های زیر، حتماً درست است؟

- ۱) $\neg r \wedge \neg p$ (۱) ۲) $\neg r \wedge q$ (۲) ۳) $\neg r \wedge \neg q$ (۳) ۴) $r \wedge (q \vee p)$ (۴)

۴۸- اگر ارزش گزاره p درست و ارزش گزاره q نادرست باشد، آن‌گاه ارزش گزاره r چه باشد تا ارزش گزاره $(p \wedge \neg r) \vee q$ درست شود؟

- ۱) درست (۱) ۲) r چه درست، و چه نادرست باشد، گزاره داده شده همواره درست است. (۲)

- ۳) نادرست (۳) ۴) $\neg r$ چه درست، و چه نادرست باشد، گزاره داده شده همواره نادرست است. (۴)

درست است

ترکیب گزاره‌ها (قسمت دوم)

۴ ترکیب دوشروطی دو گزاره

اگر از گزاره p ، گزاره q نتیجه شده و از گزاره q هم گزاره p نتیجه شود، آن‌گاه آن‌ها را نماد « \Leftrightarrow » استفاده کرده و ترکیب دوشروطی دو گزاره را به صورت « $p \Leftrightarrow q$ » می‌نویسیم. در واقع ترکیب دوشروطی « $p \Leftrightarrow q$ » همان گزاره « $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ » است.

روش‌های خواندن $p \Leftrightarrow q$:

- ۱) p نتیجه می‌دهد q را و q نتیجه می‌دهد p را.
- ۲) اگر p ، آن‌گاه q و اگر q ، آن‌گاه p .
- ۳) اگر p ، آن‌گاه q و برعکس.
- ۴) p شرط لازم و کافی است برای q .
- ۵) p اگر و تنها اگر q .

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

ارزش ترکیب دوشروطی دو گزاره: اگر دو گزاره p و q هر دو «درست» و یا هر دو «نادرست» باشند، ارزش ترکیب دوشروطی آن‌ها «درست» است و اگر یکی «درست» و یکی «نادرست» باشد، ارزش ترکیب دوشروطی آن‌ها «نادرست» می‌شود.

نکته: اگر ارزش گزاره‌های p و q مشخص نباشد، از جدول ارزش ترکیب دوشروطی p و q ارزش $p \Leftrightarrow q$ را تعیین می‌کنیم. ولی اگر ارزش‌های آن‌ها به تنهایی مشخص نباشند، بلکه ارزش ترکیب‌های شرطی $p \rightarrow q$ و $q \rightarrow p$ را بتوان تعیین کرد، از جدول ارزش ترکیب عطفی این ترکیب‌های شرطی، یعنی $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ استفاده می‌کنیم.

پاسخ تشریحی

- منطق در لغت به معنای «آنچه به گفته درآمده» می‌باشد و گزینه‌های (۱) و (۲) تعبیری است که در مورد آن به کار می‌رود. ۳ ۱
- به هر جمله خبری، گزاره نمی‌گوییم، بلکه به «هر جمله خبری که دقیقاً دارای ارزش درست یا نادرست باشد» گزاره گفته می‌شود. ۳ ۲
- بررسی گزینه‌ها: ۴ ۲

- (۱) این یک جمله خبری است، ولی ارزش آن دقیقاً قابل مشخص کردن نیست، چون به نظر یک نفر، شاید درست باشد و به نظر یک نفر دیگر، درس ریاضی.
- (۲) این یک جمله پرسشی است و اصلاً خبری نیست.
- (۳) این یک جمله امری است نه خبری!
- (۴) این یک جمله خبری است که دزلی ارزش نادرست است، پس گزاره‌ای با ارزش نادرست می‌باشد.

۱۱۱۱۱۱ ما باز هم جمله‌هایی مثل گزینه (۱) رو نمی‌تونیم تشخیص بدیم که چرا گزاره نیست! همیشه به چیزی بگین ما دیگه اشتباه نکنیم؟

پاسخ هند بار بگیم، بیرون موم اینه که بتونی دقیقاً ارزش درست یا نادرست بودن جمله خبری رو مشخص کنی. فعلاً همیشه مثلاً از فوریت پرسش به نظر تو این جمله درست یا نادرست یا نه؟ مثلاً که این جمله رو به دوستت بگی، جواب میدره درست یا نه؟ اون چی میگه؟ آگه جوابت این بود که شاید به نظر اون درست باشه یا نادرست، پس معلومه که گزاره نیست. اما آگه جواب هر دو تا تون قطعاً درست یا نادرست باشه، مثلاً گزاره هست، البت با فرض این که هر دو تا تون در مورد اون موضوع اطلاعات درست داشته باشین نه این که از رو بی‌سواری، درست یا نادرست رو اشتباهاً بگیرین. مثلاً تو گزینه (۴) تو بگی نادرست ولی دوستت بگه درست. این‌ها نمی‌تونی بگی گزینه (۴) گزاره نیست، چون اون رنگه از بی‌سواری دوسته که نمی‌دونه مقبره حافظ تو شیرازه نه کرمان!!!

- بررسی موارد: ۴ ۴
- الف) یک جمله خبری نادرست است، پس یک گزاره با ارزش نادرست می‌باشد.
- ب) یک جمله پرسشی است، پس گزاره نیست.
- ج) یک جمله خبری است ولی ارزش آن را نمی‌توان به طور دقیق مشخص کرد (به نظر یکی درست و به نظر دیگری نادرست است)، پس گزاره نیست.
- د) یک جمله خبری نادرست است (چون مثلاً ضرب دو عدد گنگ $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ برابر $\sqrt{6}$ می‌شود که گنگ است)، پس یک گزاره با ارزش نادرست می‌باشد.
- ه) یک جمله عاطفی است، پس گزاره نیست.
- و) یک جمله خبری درست است، پس یک گزاره با ارزش درست می‌باشد.
- بنابراین ۳ تا از موارد گفته شده گزاره هستند.

- بررسی گزینه‌ها: ۴ ۵
- ۱) درست $\Rightarrow 3^2 - 3^3 \times 3^3 - 3^4 \times 22 = (3)^4$
- ۲) درست \rightarrow عدد اول $\rightarrow 11 - \sqrt{131}$
- ۳) درست $\rightarrow \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > 4^2 < 5^2 \rightarrow 4^2 - 64, 4^3 - 25, 5^3$
- ۴) نادرست > 12 مقسوم‌علیه صحیح دارد. $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ = مقسوم‌علیه‌های صحیح عدد ۱۲

- تعداد ردی برای حداقل ۳ متغیر رسم می‌شود. ۲ ۶
- بقیه گزینه‌ها، گزاره‌هایی با ارزش درست هستند.
- تذکره مهم!** همیشه بگید چرا بقیه گزینه‌ها درست هستند؟

پاسخ نه! همه رو تو ریاضی سوال مهم فونری، پرو به نگاه به کتاب پارسانت بنده، همش یادت میاد.

تعداد حالت‌های ارزشی ۱۱ گزاره برابر 2^{11} است. پس داریم:

۱ ۷

$$\frac{\text{تعداد حالت‌های ارزشی } 10 \text{ گزاره}}{\text{تعداد حالت‌های ارزشی } 7 \text{ گزاره}} = \frac{2^{10}}{2^7} = 2^{10-7} = 2^3 = 8$$

۴ ۸

$$m - 7 \rightarrow 2^m - 2^7 \rightarrow 2^m - 128 = \text{تعداد حالت‌های ارزشی } 11 \text{ گزاره}$$

با حذف ۲ گزاره ۵ گزاره خواهیم داشت، در نتیجه دارای $2^5 - 2^2$ حالت ارزشی خواهند بود.

$96 - 32 - 128 =$ تفاضل تعداد حالت‌ها

سوال ۳۹ در جدول ارزشی n گزاره، برای هر گزاره، 2^{n-1} بار حرف «د» و 2^{n-1} بار حرف «ن» را می‌نویسیم. پس در مجموع، این جدول دارای $n \times 2^{n-1}$ نا حرف «د» و همچنین حرف «ن» است. با توجه به نکته بالا برای $n=4$ گزاره داریم:

$$4 \times 2^3 = 8 \times 4 = 32 \text{ در کل جدول } \rightarrow 8 - 3 - 1 = 4 \text{ برای هر گزاره}$$

سوال ۴۱۰ می‌دانیم برای نوشتن نقیض یک گزاره کافی است فعل جمله را منفی کنیم یا جمله را با «چنین نیست که» شروع کنیم. پس نقیض این گزاره به صورت‌های زیر می‌شود:

(الف) عدد نامثبت است \leftarrow یعنی m عدد منفی یا صفر است.

(ب) چنین نیست که m عدد نامثبت نیست.

پس تنها گزینه (۴) به عنوان نقیض این گزاره درست است.

سوال ۱۱۱ نقیض این گزاره به صورت « $4 < 2$ یا $2 > 4$ کوچک‌تر نیست» می‌شود که معنی « $4 > 2$ یا $2 > 4$ بزرگ‌تر یا مساوی 4 یا 4 کوچک‌تر یا مساوی 2 است» پس می‌توان نقیض آن را به صورت گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) بیان کرد.

نکته مهم: این گزاره صورت سؤال که اصلاً غلط است! آنگاه $2 - 4$ کوچک‌تر است!

سوال ۱۱۲ پاسخ «فب معلومه که درست نیست! ولی مگه مهمه؟ فب به گزاره نادرست» ما می‌فوییم نقیضش رو پیدا کنیم، حالا درست یا نادرست. اصلاً مهمه؟ فب عوضش، نقیضش درست. به زره بیشتر رفقت کن بچه بازن! با همین به فکر اشتباه، راحت به قسمت سازه رو از دست میدی.

ارزش خود گزاره «نادرست» است، چون مثلاً عدد $\frac{1}{p}$ از معکوس خود، یعنی 2 بزرگ‌تر است. نقیض گزاره به صورت «هر عدد منفی از معکوس خود، کوچک‌تر نیست» می‌شود که معنی «بعضی عددهای منفی هستند که از معکوس خود بزرگ‌تر می‌باشند» و کاملاً هم درست است، مانند اعداد بین -1 و صفر.

نکته مهم: ما نقیضش رو این طوری نوشتیم: «چنین نیست که هر عدد منفی از معکوس خود، کوچک‌تر است». اون وقت راحت‌تر نوشتیم معنی جمله رو تشخیص بدیم به جای این که فعل آخر رو منفی کنیم.

سوال ۱۱۳ پاسخ «آفرین، خیلی نکته خوبی رو گفتی. گاهی با متنی کردن فعل اثر، میشه معنی نقیض رو درک کرد و گاهی با آوردن عبارت «چنین نیست که» پس همیشه تو همین سؤال‌هایی، هر دو تا رو امتحان کنین تا بتوانین معنی ایش رو خوب درک کنین و دچار اشتباه نشین.

روش اول: چون نقیض گزاره‌های p و q را داریم، ابتدا خود گزاره‌های p و q را می‌نویسیم می‌دانیم نقیض نقیض هر گزاره برابر خود گزاره است. پس:

$$p \rightarrow \sqrt{225} \text{ عدد اول است. } \leftarrow \text{ نقیض } \leftarrow p: 15 - \sqrt{225} \text{ عدد اول نیست. } \leftarrow \text{ ارزش درست}$$

$q: -y^2 - x^2 = 0$ ضابطه یک تابع بر حسب متغیر x نیست. $q: x - y^2 = 0$ ضابطه یک تابع بر حسب متغیر x است. \leftarrow ارزش نادرست (زیرا به z می‌تواند $1 - x$ دو مقدار -1 و 1 برای y وجود دارد).

بنابراین ارزش گزاره‌های p و q به ترتیب «درست» و «نادرست» است.

روش دوم: ارزش نقیض گزاره‌ها را پیدا کرده و از روی آن، ارزش گزاره‌ها را مشخص می‌کنیم:

$$p: \sqrt{225} \text{ عدد اول است. } \leftarrow \text{ نادرست } \leftarrow \text{ ارزش درست است.}$$

$$q: -y^2 - x^2 = 0 \text{ ضابطه یک تابع بر حسب متغیر } x \text{ نیست. } \leftarrow \text{ ارزش درست است.}$$

سوال ۱۱۴ چون ارزش نقیض گزاره درست است، پس ارزش خود گزاره باید نادرست باشد. پس نباید a عددی اول باشد. در نتیجه a نمی‌تواند عدد $31 - \frac{124}{4}$ باشد.

توجه کنید که نقیض این گزاره به صورت « a عددی اول نیست» می‌شود، یعنی a عددی مرکب است یا $a = 1$ (نه اول و نه مرکب).

سوال ۱۱۵ بررسی گزاره‌ها:

الف) $x \in \mathbb{N} \rightarrow x \in \{1, 2, 3, \dots\} \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \in \{\dots, -2, -1, 0\} \xrightarrow{\text{نقیض}} x \in \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

ب) $x = 0 \xrightarrow{\frac{x+1}{2}} x = -1 \rightarrow x = -1 \rightarrow x(1+x) = 0 \rightarrow x + 2x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

ج) $x \geq 3 \xrightarrow{\text{نقیض}} x < 3 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \leq 2$

د) $\{x: x > x\} \xrightarrow{\text{نقیض}} \{x: x \leq x\} \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \in \{\dots, -2, -1, 0\} \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{N}$

پس نقیض همه گزاره‌ها درست هستند.

۱۱۶) الف) تهران پایتخت ایران است و علم‌گروه بلندترین فله ایران است.

پزشک گزاره p ، درست و ارزش گزاره q ، نادرست است (دماوند، بلندترین فله ایران است). حال ترکیب منطقی یک گزاره درست و یک گزاره نادرست، یک گزاره نادرست می‌شود.

ب) این جواجو در جوزستان است یا مقبره حیم در همدان است.

ارزش هر دو گزاره p و q نادرست است. پس ترکیب منطقی آن‌ها هم نادرست می‌باشد.

۱۱۷) بررسی گزینه‌ها:

۱) $p: 4 < (-2)^2 \rightarrow 4 < 4$ ✓ $\Rightarrow p \wedge q$ درست است.

$q: \sqrt{2} > \sqrt{2}$ ✓

۲) $p: (-2)^2 < 0 \Rightarrow 4 < 0$ ✓ $\Rightarrow p \vee q$ درست است.

$q: -\frac{1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$ *

۳) $p: 5^2 - \sqrt{625} \Rightarrow 25 - \sqrt{25^2} \Rightarrow 25 - 25$ ✓ $\Rightarrow p \vee q$ درست است.

$q: \mathbb{W} \subseteq \mathbb{N} * (\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W})$

۴) $p: (\sqrt{y})^2 + Q^2 * ((\sqrt{y})^2 - y + Q)$ $\Rightarrow p \wedge q$ نادرست است.

$q: 2^2 = * (3 - 1)$

۱۱۸) گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ فقط ضرورتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.

۱۱۹)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \vee q$	$p \wedge (\sim q)$	$\sim (p \wedge (\sim q))$
د	د	ن	ن	د	ن	د

بنابراین ارزش هر دو گزاره، درست است.

۱۲۰) مگر فرض کنیم $p \wedge q - I$ باشد، آن‌گاه باید ارزش گزاره $I \vee (\sim I)$ را تعیین کنیم. می‌دانیم ترکیب منطقی هر گزاره با نقیصت، همواره درست است.

پس ارزش این گزاره، همواره درست می‌باشد.

۱۲۱) چون نقیص گزاره‌های p و q دارای ارزش درست است، پس خود گزاره‌های p و q دارای ارزش نادرست هستند. در نتیجه داریم:

p	q	r	$\sim q$	$p \wedge q$	$p \vee r$	$\sim (p \vee r)$	$(p \wedge q) \vee r$	$(\sim (p \vee r)) \wedge (\sim q)$
ن	ن	ن	د	ن	ن	د	ن	د

۱۲۲) برای q دو حالت «د» و «ن» را در نظر می‌گیریم.

بررسی گزینه‌ها:

۱)

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$
د	د	د	ن
د	ن	ن	د

۲)

p	q	$\sim p$	$(\sim p) \vee q$
د	د	ن	د
د	ن	ن	د

۳)

p	q	$\sim p$	$(\sim p) \wedge p$	$((\sim p) \wedge p) \vee q$
د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	ن	ن

۴)

p	q	$\sim q$	$q \vee (\sim q)$	$(q \vee (\sim q)) \wedge p$
د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	ن

۱۲۳) خب گزینه (۳) هم نادرست داشت دیدیم؟

۱۲۴) پاسخ بده، ولی درست هم داشت. اما سوال از ما خواسته کدام گزاره، همواره نادرست. تو گزینه (۳) به ازای q درست، درست و به ازای q

نادرست، نادرست ولی تو گزینه (۴)، q به درست باشد، به نادرست، گزاره داده شده، همواره نادرست.

۴ ۲۲ ترکیب عقلی دو گزاره تنها در صورتی درست است که هر دو گزاره درست باشند. چون ارزش گزاره «میانگین همان جازک دوم داده‌ها است» درست است، پس p هم باید گزاره‌ای با ارزش درست باشد.

بررسی گزینه‌ها:

(۱) الفبای فارسی دارای ۲۲ حرف است، پس گزاره داده‌شده نادرست است.

(۲) توان دوم هر عدد لزوماً از خود عدد بزرگ‌تر نیست، مثل عدد $\frac{1}{4}$ که توان دوم آن $\frac{1}{16}$ است که از آن کوچک‌تر می‌باشد، پس این گزاره هم نادرست است.

(۳) متغیرها به دو نوع کیفی و کمی تقسیم می‌شوند و مقیاس تقسیم‌بندی آن‌ها ترتیبی، اسمی، فاصله‌ای و نسبی است، پس این گزاره هم نادرست است.

(۴) $x^2 + y^2 = 0$ فقط به ازای $(0,0)$ برقرار است. پس این ضابطه یک تابع شامل یک نقطه است و بنابراین گزاره‌ای درست می‌باشد. در نتیجه p می‌تواند گزاره گزینه (۴) باشد.

۴ ۲۴ یک گزاره شرطی در صورتی به انتهای مقدم، درست است که مقدم نادرست باشد. پس باید $p \vee q$ نادرست باشد، از طرفی می‌دانیم ترکیب فضلی دو گزاره، تنها در صورتی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند. بنابراین p و q باید هر دو نادرست باشند.

بررسی گزاره‌ها:

(الف) اگر سعدی شاعر شاهنامه است، آن‌گاه موعوی شاعر بوسلیمان است.

q p

ارزش p نادرست است، پس این گزاره شرطی به انتهای مقدم، درست می‌باشد. (البته ارزش q هم نادرست است.)

(ب) اگر مقبره بوسی در همدان است، آن‌گاه مقبره حیام در تبریز است.

q p

ارزش p درست و ارزش q نادرست است، پس ارزش این گزاره شرطی نادرست می‌باشد.

۱ ۲۶ دو گزاره داریم. پس دارای $2^2 = 4$ حالت ارزشی هستند:

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge q$	$(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge q)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د

۲ ۲۷ بررسی گزینه‌ها:

(۱) اگر ۴۵ عدد اول است، آن‌گاه ۲۸۹ عدد مربع کامل است.

q p

p گزاره‌ای نادرست $(45 - 6 \times 5)$ و q گزاره‌ای درست $(289 - 17^2)$ است. پس این گزاره شرطی، به انتهای مقدم، درست می‌باشد.

(۲) اگر ۱۶ ضرب ۴ است، آن‌گاه $(4)^2 - 4$.

q p

p گزاره‌ای نادرست $(16 = 4 \times 4)$ و q هم گزاره‌ای نادرست $((-2)^2 = 4)$ است. پس این گزاره شرطی به انتهای مقدم، درست می‌باشد.

(۳) اگر $4 < 5$ است، آن‌گاه $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ نیست.

q p

p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست است. پس ارزش این گزاره شرطی، نادرست می‌باشد.

(۴) اگر $6 - 1 \times 3 = 3$ ، آن‌گاه ۹۱ عدد مرکب است.

q p

گزاره p درست $(3 - 3 = 0)$ و q هم گزاره‌ای درست $(91 = 7 \times 13)$ است. پس ارزش این گزاره شرطی درست می‌باشد.

۱ ۲۸ ترکیب فضلی دو گزاره، تنها در صورتی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند. یعنی تالی در گزاره شرطی داده‌شده $(p \vee q)$ همواره درست می‌باشد. حال گزاره شرطی داریم که تالی آن درست است. پس مقدم، چه درست و چه نادرست باشد، ارزش این گزاره همواره درست خواهد بود.

بررسی گزاره‌ها:

(الف) مقدم درست و تالی نادرست است. پس این گزاره نادرست می‌باشد.

(ب) مقدم نادرست و تالی هم نادرست است. پس این گزاره به انتهای مقدم، درست می‌باشد.

(ج) مقدم درست و تالی هم درست است. پس این گزاره درست می‌باشد.

(د) مقدم نادرست و تالی درست است. پس این گزاره به انتهای مقدم، درست می‌باشد.

بررسی گزینه‌ها: ۲ ۳۰

- ۱) معدم نادرست است، پس گزاره شرطی $p \rightarrow \neg p$ به انتهای مقدم، درست است.
- ۲) تالی نادرست است، پس اگر مقدم درست باشد، گزاره شرطی نادرست و اگر مقدم نادرست باشد، گزاره شرطی درست است.
- ۳) مقدم درست و تالی نادرست است، پس گزاره شرطی نادرست می‌باشد.
- ۴) تالی درست است، پس گزاره شرطی (چه q درست باشد و چه نادرست) درست می‌باشد.

بررسی گزینه‌ها: ۳ ۳۱

۱)	p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
	د	ن	ن	ن	د

۲)	p	q	r	$\neg p$	$\neg p \Rightarrow (q \vee r)$
	د	ن	ن	ن	د

توجه کنید که در گزینه (۲)، ارزش $q \vee r$ 'صلاً مهم نیست و گزاره به انتهای مقدم، درست است.

۳)	p	q	r	$p \Rightarrow r$	$q \wedge (p \Rightarrow r)$
	د	ن	ن	ن	ن

۴)	p	q	r	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
	د	ن	ن	ن	د

در گزینه (۴) هم، گزاره به انتهای مقدم، درست است.

- چون ارزش گزاره $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ نادرست است، پس حتماً مقدم درست و تالی نادرست می‌باشد. بنابراین r نادرست است. حال p نادرست و $p \rightarrow q$ درست است که q چه درست و چه نادرست باشد، همواره برقرار است.

توجه کنید! چرا q هر چی باشد، $p \Rightarrow q$ درست میشه؟

پاسخ: به سؤالی پرسیدی که جوابش رو بارها و بارها گفتیم! نمیکه بینم فوراً یادت میاد یا نه؟ فقط به این دقت کن که p نادرست ...

بررسی گزینه‌ها: ۴ ۳۲

۱)	p	q	r	$p \Rightarrow r$	$q \vee (p \Rightarrow r)$
	د	ن	ن	ن	ن

۲)	p	q	r	$\neg q$	$\neg q \vee p$	$(\neg q \vee p) \wedge r$
	د	ن	ن	د	د	ن

۳)	p	q	r	$\neg r$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg r)$
	د	ن	ن	د	ن	ن

۴)	p	q	r	$\neg p$	$q \vee r$	$\neg(q \vee r)$	$\neg p \Rightarrow \neg(q \vee r)$
	د	ن	ن	ن	ن	د	د

بررسی گزینه‌ها: ۲ ۳۳

- ۱) در گزاره شرطی $p \rightarrow r$ ، تالی درست است، پس r چه درست باشد و چه نادرست، این گزاره شرطی درست است. حال ترکیب فصلی یک گزاره درست با یک گزاره نادرست، درست است.
- ۲) $(\neg p)$ نادرست است، پس $\neg p \wedge r$ همواره نادرست است. چون $\neg q$ درست می‌باشد، پس از یک گزاره درست، یک گزاره نادرست نتیجه شده و بنابراین گزاره حاصل، نادرست است.
- ۳) $(\neg p)$ نادرست است، پس گزاره شرطی $p \rightarrow r$ به انتهای مقدم، درست است. حال چون از یک گزاره درست یک گزاره درست $(\neg q)$ نتیجه شده، پس ارزش گزاره داده‌شده، درست است.
- ۴) q نادرست است، پس $q \wedge r$ نادرست می‌باشد. بنابراین گزاره شرطی داده‌شده، به انتهای مقدم، درست است.

بررسی گزینه‌ها: ۳ ۳۴

- ۱) گزاره‌ی نادرست است، پس ترکیب خطفی آن با هر گزاره‌ی همواره نادرست می‌باشد. یعنی گزاره $(p \wedge q) \wedge r$ همواره نادرست است.
- ۲) $r \wedge p$ هم نادرست است، از شرطی r درست می‌باشد، پس از یک گزاره درست، یک گزاره نادرست نتیجه شده است. بنابراین گزاره داده‌شده، نادرست می‌باشد.

۳) $I \rightarrow p$ نادرست است، پس $I \rightarrow p$ به 'نتقای' مقدم، درست می‌باشد و ترکیب فضا I با هر گزاره‌ای درست است، بنابراین گزاره $(I \rightarrow p) \vee q$ همواره درست است.

۴) نادرست است، پس $I \vee q$ اگر q درست باشد درست و اگر q نادرست باشد نادرست است. ارزش p هم که مشخص نیست، پس ارزش این گزاره را نمی‌توان به طور دقیق تعیین کرد.

بررسی گزینه‌ها:

۳ ۲۶

	p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
۱)	د	ن	د
	ن	د	د

این گزاره همواره درست است.

	p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
۲)	د	د	د	د
	د	ن	ن	د
	ن	د	ن	د
	ن	ن	ن	د

این گزاره همواره درست است.

	p	$\sim p$	$\sim p \Rightarrow p$
۳)	د	ن	د
	ن	د	ن

اگر p درست باشد، درست و اگر p نادرست باشد، نادرست است.

	p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \vee p$
۴)	د	د	د	د
	د	ن	ن	د
	ن	د	د	د
	ن	ن	د	د

این گزاره همواره درست است.

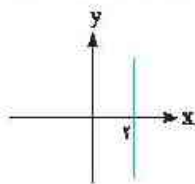
$q \Rightarrow p$ نادرست است، پس q درست و p نادرست می‌باشد. چون p نادرست است، پس $I \wedge p$ هم نادرست است (I چه درست و چه نادرست باشد). از طرفی در سؤال گفته شده $I \rightarrow (I \wedge p)$ درست است، پس چون نالی نادرست است، باید مقدم، یعنی I هم نادرست باشد تا ارزش این گزاره درست شود. در نتیجه ارزش I نادرست و I دلخواه است.

۱ ۲۷

ارزش گزاره p نادرست است، چون $(a^3 - b^3) - (a - b)(a^2 - ab - b^2) = 0$ ، حال چون ارزش گزاره $q \vee p \rightarrow p$ درست است و نالی نادرست می‌باشد، باید مقدم هم نادرست باشد تا ارزش گزاره شرطی به 'نتقای' مقدم، درست شود. بنابراین $q \vee p$ نادرست است، چون p نادرست است، باید q هم نادرست باشد تا $q \vee p$ نادرست شود. پس باید گزاره‌ای را انتخاب کنیم که دارای ارزش نادرست می‌باشد.

۴ ۲۸

بررسی گزینه‌ها:



۱) درست، زیرا: $4 \times 6 - 4 = 24$.

۲) درست، زیرا یک خط موازی محور Y ها نمودار r در بی‌شمار نقطه، قطع می‌کند.

۳) درست، زیرا: $\sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}$ و $\sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}$ پس $2^1 - \frac{1}{4}$.

۴) نادرست، زیرا، ریشه ندارد. $\Rightarrow x^2 - 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

بنابراین تنها گزاره‌ای که نادرست است، گزینه (۴) می‌باشد.

بررسی گزینه‌ها:

۴ ۲۹

۱) گزاره‌ای درست است، پس ترکیب فضایی آن با هر گزاره‌ای (چه درست و چه نادرست) همواره درست می‌باشد. حال گزاره درست $p \vee \sim q$ گزاره I نتیجه شده است که اگر I درست باشد، گزاره $p \vee \sim q > I$ نادرست باشد، گزاره $p \vee \sim q > I$ نادرست است.

۲) $(\sim p)$ گزاره‌ای نادرست است که نالی گزاره شرطی است، پس اگر q درست باشد، گزاره شرطی $q \rightarrow \sim p$ نادرست و اگر q نادرست باشد، گزاره شرطی $q \rightarrow \sim p$ نادرست است.

۳) $(\sim p)$ نادرست است، پس ترکیب عطفی آن با هر گزاره‌ای، همواره نادرست می‌باشد. حال ترکیب فضایی این گزاره نادرست ($\sim p \wedge q$) با گزاره درست p همواره درست است.

۴) ترکیب عطفی گزاره نادرست $(\sim p)$ با هر گزاره‌ای، نادرست است. حال از گزاره درست p ، گزاره نادرست $\sim p \wedge q$ نتیجه شده، پس گزاره $(\sim p \wedge q) > p$ همواره نادرست است.

گزاره‌های داده‌شده را بررسی می‌کنیم:

(۱) $p \vee q$ درست است، پس حداقل یکی از گزاره‌های p یا q درست می‌باشد. (حداقل یعنی یکی یا هر دو)

(۲) $q \rightarrow r$ درست است، پس حالت q درست و r نادرست امکان ندارد.

(۳) $p \wedge I$ نادرست است، پس حداقل یکی از گزاره‌های p یا I نادرست است.

(۴) $I \Rightarrow \sim q$ نادرست است، پس $q \sim$ درست و I نادرست است.

حال از نتیجه‌گیری‌های فوق می‌توان فهمید که:

از (۴) نتیجه می‌شود که q نادرست و I هم نادرست است.

از (۱) و این که q نادرست است، نتیجه می‌شود که p درست است.

از (۳) و این که p درست است، نتیجه می‌شود که I نادرست است.

بنابراین گزاره‌های p درست و گزاره‌های q ، r و I نادرست هستند.

توجه: خیلی سؤال باحالی بود. همیشه از این سؤال‌ها باز هم بپدید!

پاسخ: بله که میشه! فوبه که این فکر علاقه‌مند شری! پس برو تست ببری رو حل کن. ببینم بیگار می‌کنی!

گزاره‌های داده‌شده را بررسی می‌کنیم:

(۱) $p \wedge r$ نادرست است، پس حداقل یکی از گزاره‌های p یا r نادرست است.

(۲) $(q \vee r) > (I \wedge q)$ نادرست است، پس $q \vee r$ درست و $I \wedge q$ نادرست است. یعنی حداقل یکی از گزاره‌های q یا r درست است و همچنین حداقل یکی از گزاره‌های I یا q نادرست است.

(۳) $r \rightarrow I$ نادرست است، پس I درست و r نادرست است.

از موارد بالا نتیجه می‌شود که:

از (۳) می‌فهمیم که I درست و r هم درست است.

از (۱) و این که I درست است، نتیجه می‌شود که p نادرست است.

از (۲) و این که I درست است، نتیجه می‌شود که q نادرست است.

بنابراین گزاره‌های p و q نادرست و گزاره‌های r و I درست هستند.

$p > q$ درست است، پس حالت p درست و q نادرست امکان ندارد.

$p \Rightarrow \sim q$ درست است، پس حالت $\sim q$ درست و p نادرست امکان ندارد. یعنی حالت p و q هر دو نادرست رخ نمی‌دهد.

p	q
د	د
د	ن

از موارد بالا می‌توان نتیجه گرفت که در جدول ارزشی p و q که ۴ حالت باید وجود داشته باشد، ۲ حالت p درست و q نادرست و p و q نادرست حذف می‌شوند و تنها دو حالت مقابل را داریم:

همان‌طور که می‌بینید گزاره q همواره درست است.

روش اول: می‌دانیم ۳ گزاره دارای $2^3 = ۸$ حالت ارزشی هستند. از طریق می‌دانیم یک گزاره شرطی فقط در حالتی که مقدمه درست و نتایج نادرست باشد، نادرست است و در بقیه حالت‌ها درست می‌باشد.

پس در این جا تنها حالتی که $I \rightarrow p$ درست و q نادرست باشد را از ۸ حالت که می‌کنیم، به‌طور مشابه، $p \rightarrow I$ از بین ۴ حالت، فقط در ۱ حالت نادرست است، پس در ۳ حالت، $p \Rightarrow I$ درست می‌باشد. برای $p \Rightarrow I$ وقتی که درست است، q حالت درست و نادرست دارد (یعنی ۲ حالت داریم) که هر حالت نادرست q را از آن‌ها برداریم، در کل ۳ حالت باقی می‌ماند که $p \Rightarrow I$ درست و q نادرست می‌شود. پس

در $۵ - ۳ - ۸$ حالت این گزاره دارای ارزش درست است.

روش دوم: جدول ارزش گزاره‌ها را رسم می‌کنیم:

p	q	r	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow r) \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	د
د	ن	د	د	ن
د	ن	ن	د	د
ن	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	ن
ن	ن	ن	د	ن

همان‌طور که می‌بینید در ۵ حالت، این گزاره دارای ارزش درست است.

چون ۴ گزاره داریم، پس $2^4 = 16$ حالت ارزشی برای آن‌ها وجود دارد. جدول ارزش گزاره‌ها را رسم می‌کنیم:

p	q	r	$\sim p$	$\sim r$	$q \vee r$	$\sim p \wedge \sim r$	$(\sim p \wedge \sim r) \Rightarrow q \vee r$
د	د	د	ن	ن	د	ن	د
د	د	ن	ن	د	د	ن	د
د	ن	د	ن	ن	د	ن	د
د	ن	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	د	د	ن	د	ن	د
ن	د	ن	د	د	د	د	د
ن	ن	د	د	ن	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	ن	د	د

همان‌طور که می‌بینید تنها در حالت آخر که هر سه گزاره نادرست باشند، ارزش این گزاره نادرست می‌شود.

تذکره: ما گزینه‌ها را امتحان کردیم و دیدیم تنها تو حالت گزینه (۳)، ارزش این گزاره، نادرست همیشه، درست است؟

پاسخ: بده کارت کاملاً درست است. ما راه‌حل کامل رو انجام دادیم تا موضوع کاملاً براتون شفاف باشه.

چون گزاره شرطی به تنهایی مقدم، درست است پس حتماً مقدم آن نادرست می‌باشد. یعنی «دیروز شنبه بود» نادرست است. بنابراین امروز قطعاً یکشنبه نیست. از طرفی تالی درست است، در حالی، ترکیب فصلی دو گزاره «فردا چهارشنبه است» و «فردا دوشنبه است» را داریم.

می‌دانیم ترکیب فصلی در صورتی درست است که حداقل یکی از گزاره‌ها درست باشد. حال حالت‌های مختلف را بررسی می‌کنیم:

(۱) هر دو درست باشد: امکان ندارد که فردا هم چهارشنبه باشد و هم دوشنبه.

(۲) «فردا چهارشنبه است» درست و «فردا دوشنبه است» نادرست باشد: این یعنی امروز سه‌شنبه است و امروز یکشنبه نیست.

(۳) «فردا چهارشنبه است» نادرست و «فردا دوشنبه است» درست باشد: این یعنی امروز سه‌شنبه نیست و امروز یکشنبه است. ولی ما گفتیم که امروز قطعاً یکشنبه نیست. پس این حالت هم امکان ندارد. بنابراین تنها حالت (۲) امکان‌پذیر است و امروز سه‌شنبه می‌باشد.

ارزش p درست است، پس ترکیب عطفی آن با گزاره درست، درست و با گزاره نادرست، نادرست می‌شود. چون می‌دانیم ارزش گزاره داده‌شده، نادرست است، پس باید ارزش گزاره $p \vee q$ نادرست باشد تا ترکیب عطفی آن با گزاره درست p، نادرست شود. حال چون $p \sim q$ دارای ارزش نادرست است، ترکیب فصلی آن تنها با گزاره نادرست، دارای ارزش نادرست می‌شود، یعنی باید ارزش q نادرست و در نتیجه ارزش q باید درست باشد.

تذکره: ما خیلی گیج شدیم! سخت بود! راه‌حل دیگری نداره؟

پاسخ: کدوم؟ قسمتش سخت بود؟ فقط به کم مراحل بررسی‌اش زیاد بود که اونم اگر مرحله به مرحله مثل ما پیش بری، هیچ وقت اشتباه نمی‌کنی. تازه بعتره در آتم دوباره پیوست رو بک کنی، این کار رو حالا با فرض p درست و q درست، انجام می‌دیم تا ببینی که جوابمون درست است.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$(\sim p \vee \sim q) \wedge p$
د	د	ن	ن	ن	ن

اینکه می‌شه گفت اینم به روش حل دیگری هست. تو ارزش گزاره داده‌شده رو با فرض یک بار q درست و یک بار q نادرست به دست بیاره.

بین به‌ارزی کردیمش، ارزشش نادرست میشه. این کار رو هم انجام بدیم تا حسابی خیالمون راحت بشه این پارا فرض p درست و q نادرست، داریم.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$(\sim p \vee \sim q) \wedge p$
د	ن	ن	د	د	د

پس به‌ارزی q نادرست، ارزش این گزاره درست میشه و قابل قبول نیست. اینم به راه‌حل دیگری که فکر کنی برای شما راحت‌تر و قابل درک‌تر باشه.

یک گزاره شرطی تنها در صورتی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد، پس درست و $p \vee q$ نادرست است. از طرفی ترکیب فصلی دو گزاره تنها وقتی نادرست است که هر دو نادرست باشند بنابراین p و q هر دو نادرست هستند. حال ارزش گزاره‌های داده‌شده را مشخص می‌کنیم.